УДК 517.983.53

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ф.С.ЛАЧЫНОВА
Бакинский Государственный Университет
Fidashka707@gmail.com

В работе выделен класс параболических операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой, для которого начально-краевая задача на полуоси корректно и однозначно разрешима в пространстве типа Соболева. Условия разрешимости получены на языке операторных коэффициентов исследуемого уравнения.

Ключевые слова: операторно-дифференциальное уравнение, кратная характеристика, начально-краевая задача, гильбертово пространство, операторы промежуточных производных, регулярная разрешимость.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (x,y), $x,y\in H$ и A - самосопряженный положительно-определенный оператор в H ($A=A^*\ge cE,\ c>0$, E - единичный оператор). Обозначим через H_γ ($\gamma\ge 0$) шкалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A, т.е. $H_\gamma=Dom(A^\gamma)$, $(x,y)_\gamma=(A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x,y\in Dom(A^\gamma)$. Когда $\gamma=0$ считаем, что $H_0=H$, $(x,y)_0=(x,y)$, $x,y\in H$.

Обозначим через $L_2([a,b];H)$ ($-\infty\le a<b\le+\infty$) пространство измеримых (см. [1]) функций со значениями в H, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_2([a,b];H)}=\left(\int_a^b\|f(t)\|^2dt\right)^{1/2},$$

через $W_2^3([a,b];H)$ - пространство функций со значениями в H таких, что $\dfrac{d^3u(t)}{dt^3}$, $A^3u(t) \in L_2([a,b];H)$, с нормой

$$\|u\|_{W_2^3([a,b];H)} = \left(\left\| \frac{d^3u}{dt^3} \right\|^2_{L_2([a,b];H)} + \left\| A^3 u \right\|^2_{L_2([a,b];H)} \right)^{1/2}.$$

Подробнее о пространстве $W_2^3([a,b];H)$ см. [2, гл.1]. Будем полагать, что при $a = -\infty$, $b = +\infty$

$$L_2((-\infty,+\infty);H) \equiv L_2(R;H),\ W_2^3((-\infty,+\infty);H) \equiv W_2^3(R;H),\ R = (-\infty,+\infty),$$

а при $a = 0$, $b = +\infty$

$$L_2([0,+\infty);H) \equiv L_2(R_+;H),\ W_2^3([0,+\infty);H) \equiv W_2^3(R_+;H),\ R_+ = [0,+\infty).$$

По ходу всей статьи все производные понимаются в смысле теории распределений.

На полуоси R_+ рассмотрим следующую задачу:

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^3 u(t) + A_1 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + A_2 \frac{du(t)}{dt} = f(t), \quad t \in R_+, \tag{1}$$

$$u(0) = \frac{du(0)}{dt} = \frac{d^2u(0)}{dt^2} = 0, \tag{2}$$

где $A = A^* \geq cE$, $c > 0$, A_1, A_2 - линейные, вообще говоря, неограниченные операторы, $f(t) \in L_2(R_+;H)$, $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$.

Определение 1. Если функция $u(t) \in W_2^3(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в R_+, то ее будем называть *регулярным решением* уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_2(R_+;H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), для которого условия в нуле (2) выполняются в смысле

$$\lim_{t \to 0} \left\| A^{5/2-n} \frac{d^n u(t)}{dt^n} \right\| = 0, \quad n = 0,1,2,$$

и имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^3(R_+;H)} \leq const \|f\|_{L_2(R_+;H)},$$

то задачу (1), (2) будем называть *регулярно разрешимой*.

В данной работе указаны достаточные условия для регулярной разрешимости начально-краевой задачи (1), (2). Эти условия выражены на языке операторных коэффициентов операторно-дифференциального уравнения (1). Главной частью уравнения (1) является абстрактное параболическое уравнение в гильбертовом пространстве, имеющее кратную характеристику.

Несмотря на то, что, начиная с 50-х годов прошлого века, имеется достаточно много статей и книг, посвященных вопросам разрешимости параболических операторно-дифференциальных уравнений в банаховых и, в частности, гильбертовых пространствах, интерес к таким уравнениям не стихает до последнего времени (см., например, [3-6]). Однако в математической литературе исследования по параболическим операторно-дифференциальным уравнениям с кратной характеристикой почти не затронуты, хотя они имеют широкое применение в ряде задач механики и математической физики. При этом следует отметить, что в работе [5] на полуоси изучена регулярная разрешимость в пространстве типа Соболева начально-краевой задачи для одного класса параболических операторно-дифференциальных уравнений второго порядка (как с простой, так и с кратной характеристикой). А в работах [7, 8] проведены схожие исследования для краевой задачи на полуоси для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой, близкого по своим характеристическим свойствам к эллиптическим и квазиэллиптическим операторно-дифференциальным уравнениям.

Сначала исследуем уравнение (1), когда $A_1 = A_2 = 0$.

Положим

$$\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)=\left\{u(t):u(t)\in W_2^3(R_+;H),\, u(0)=\frac{du(0)}{dt}=\frac{d^2u(0)}{dt^2}=0\right\}$$

и обозначим через P_0 оператор, действующий из $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ в $L_2(R_+;H)$ следующим образом:

$$\mathrm{P}_0u(t)\equiv\left(\frac{d}{dt}+A\right)^3u(t),\quad u(t)\in\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H).$$

Справедлива

Теорема 1. *Оператор* P_0 *изоморфно отображает* $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ *на* $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. Очевидно, что уравнение $\mathrm{P}_0u(t)=0$, $u(t)\in\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$, имеет лишь нулевое решение. Действительно, уравнение $\mathrm{P}_0u(t)=0$ имеет из пространства $W_2^3(R_+;H)$ решение, представимое в виде

$$u_0(t)=e^{-tA}\varphi_0+tAe^{-tA}\varphi_1+t^2A^2e^{-tA}\varphi_2,$$

где векторы $\varphi_n\in H_{5/2}$, $n=0,1,2$. Учитывая условия (2), имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \varphi_0=0, \\ -A\varphi_0+A\varphi_1=0, \\ A^2\varphi_0-2A^2\varphi_1+2A^2\varphi_2=0. \end{cases}$$

Из этой системы получаем, что $\varphi_0=\varphi_1=\varphi_2=0$ и $u_0(t)=0$. Значит, уравнение $\mathrm{P}_0 u(t)=0$ имеет лишь нулевое решение из пространства $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$.

Теперь докажем, что уравнение $\mathrm{P}_0 u(t)=f(t)$ при любом $f(t)\in L_2(R_+;H)$ имеет решение из пространства $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$. Продолжим функцию $f(t)$ нулем для $t<0$, тогда, применяя прямое и обратное преобразования Фурье, становится ясно, что

$$u_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(i\xi E+A)^{-3}\left(\int_0^{+\infty} f(s)e^{-i\xi s}ds\right)e^{i\xi t}d\xi,\ \ t\in R,$$

удовлетворяет уравнению $\mathrm{P}_0 u(t)=f(t)$ почти всюду в R. Покажем, что $u_1(t)\in W_2^3(R;H)$. Из равенства Парсеваля получаем:

$$\|u_1\|^2_{W_2^3(R;H)}=\left\|\frac{d^3u_1}{dt^3}\right\|^2_{L_2(R;H)}+\|A^3u_1\|^2_{L_2(R;H)}=\|-i\xi^3\tilde{u}_1(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}+\|A^3\tilde{u}_1(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}=$$

$$=\|-i\xi^3(i\xi E+A)^{-3}\tilde{f}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}+\|A^3(i\xi E+A)^{-3}\tilde{f}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}\le$$

$$\le\sup_{\xi\in R}\|-i\xi^3(i\xi E+A)^{-3}\|^2_{H\to H}\|\tilde{f}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}+$$

$$+\sup_{\xi\in R}\|A^3(i\xi E+A)^{-3}\|^2_{H\to H}\|\tilde{f}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)},\qquad(3)$$

где $\tilde{u}_1(\xi)$ и $\tilde{f}(\xi)$ - преобразования Фурье функций $u_1(t)$ и $f(t)$, соответственно. Под обозначением $\sigma(A)$ будем понимать спектр оператора A. Из спектрального разложения оператора A при $\xi\in R$ имеем:

$$\|-i\xi^3(i\xi E+A)^{-3}\|=\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|-i\xi^3(i\xi+\mu)^{-3}\right|\le$$

$$\le\sup_{\mu\in\sigma(A)}\frac{|\xi|^3}{(\xi^2+\mu^2)^{3/2}}\le 1,\qquad(4)$$

$$\|A^3(i\xi E+A)^{-3}\|=\sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^3(i\xi+\mu)^{-3}\right|\le$$

$$\le\sup_{\mu\in\sigma(A)}\frac{\mu^3}{(\xi^2+\mu^2)^{3/2}}\le 1.\qquad(5)$$

Принимая во внимание (4) и (5) в (3), получим:

$$\|u_1\|^2_{W_2^3(R;H)}\le 2\|\tilde{f}(\xi)\|^2_{L_2(R;H)}=2\|f(t)\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Следовательно, $u_1(t)\in W_2^3(R;H)$. Далее обозначим сужение функции

$u_1(t)$ на R_+ через $v(t)$. Очевидно, что $v(t)\in W_2^3(R_+;H)$. По теореме о следах [2, гл. 1] $\frac{d^n v(0)}{dt^n}\in H_{5/2-n}$, $n=0,1,2$. Тогда мы будем искать решение уравнения $\mathrm{P}_0 u(t)= f(t)$ в виде

$$u(t)=v(t)+e^{-tA}\psi_0+tAe^{-tA}\psi_1+t^2A^2e^{-tA}\psi_2,$$

где векторы $\psi_n\in H_{5/2}$, $n=0,1,2$. Для однозначного определения ψ_n, $n=0,1,2$, из условий (2) получаем следующую систему:

$$\begin{cases} v(0)+\psi_0=0, \\ \dfrac{dv(0)}{dt}-A\psi_0+A\psi_1=0, \\ \dfrac{d^2v(0)}{dt^2}+A^2\psi_0-2A^2\psi_1+2A^2\psi_2=0. \end{cases}$$

А из этой системы имеем

$$\psi_0=-v(0)\in H_{5/2},$$

$$\psi_1=-v(0)-A^{-1}\frac{dv(0)}{dt}\in H_{5/2},$$

$$\psi_2=-\frac{1}{2}v(0)-A^{-1}\frac{dv(0)}{dt}-\frac{1}{2}A^{-2}\frac{d^2v(0)}{dt^2}\in H_{5/2}.$$

Таким образом, $u(t)\in \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$.

Ясно, что оператор P_0 ограниченно действует из пространства $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ в пространство $L_2(R_+;H)$. Действительно, принимая во внимание теорему о промежуточных производных [2, гл.1], имеем:

$$\|\mathrm{P}_0u\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|\left(\frac{d}{dt}+A\right)^3u\right\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|\frac{d^3u}{dt^3}+3A\frac{d^2u}{dt^2}+3A^2\frac{du}{dt}+A^3u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le$$

$$\le\left\|\frac{d^3u}{dt^3}\right\|_{L_2(R_+;H)}+3\left\|A\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)}+3\left\|A^2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}+\|A^3u\|_{L_2(R_+;H)}\le$$

$$\le const\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}.$$

Значит, оператор $\mathrm{P}_0:\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)\to L_2(R_+;H)$ взаимнооднозначен и ограничен. Следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе оператор $\mathrm{P}_0^{-1}: L_2(R_+;H) \to \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ ограничен. Тем самым, оператор P_0 осуществляет изоморфизм между пространствами $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ и $L_2(R_+;H)$. Теорема доказана.

В силу того, что операторы промежуточных производных

$$A^{3-j}\frac{d^j}{dt^j}:\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H) \to L_2(R_+;H),\ j=1,2,$$

непрерывны, а из теоремы 1 вытекает, что нормы $\|u\|_{W_2^3(R_+;H)}$ и $\|\mathrm{P}_0 u\|_{L_2(R_+;H)}$ эквивалентны в пространстве $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$, то по теореме о промежуточных производных [2, гл.1] числа

$$N_j(R_+) = \sup_{0\neq u\in \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)} \left\| A^{3-j}\frac{d^j u}{dt^j}\right\|_{L_2(R_+;H)} \|\mathrm{P}_0 u\|_{L_2(R_+;H)}^{-1},\ \ j=1,2,$$

конечны. Займемся вычислением $N_j(R_+)$, $j=1,2$. Для этого, исходя из метода, предложенного в работе [9] (подробнее см. [10]), рассмотрим зависящие от действительного параметра β следующие естественно возникающие при преобразовании Фурье полиномиальные операторные пучки:

$$P_j(\lambda;\beta;A) = \left((i\lambda)^2 E + A^2\right)^3 - \beta (i\lambda)^{2j} A^{6-2j},\ \ j=1,2. \qquad (6)$$

Известна следующая теорема факторизации пучков (6).

Теорема 2 [8]. *Пусть* $\beta \in \left[0, \frac{27}{4}\right)$. *Тогда полиномиальные операторные пучки (6) обратимы на мнимой оси и они допускают следующие представления:*

$$P_j(\lambda;\beta;A) = F_j(\lambda;\beta;A)F_j(-\lambda;\beta;A),\ j=1,2,$$

причем

$$F_j(\lambda;\beta;A) = \prod_{s=1}^{3}\left(\lambda E - \omega_{j,s}(\beta)A\right) \equiv$$
$$\equiv \lambda^3 E + \alpha_{1,j}(\beta)\lambda^2 A + \alpha_{2,j}(\beta)\lambda A^2 + A^3,$$

где $\operatorname{Re}\omega_{j,s}(\beta) < 0$, $s=1,2,3$, *а числа* $\alpha_{1,j}(\beta), \alpha_{2,j}(\beta)$ *положительны и удовлетворяют следующим системам уравнений:*

1) при $j=1$ *2) при* $j=2$

$$\begin{cases} -2\alpha_{2,1}(\beta) + \alpha_{1,1}^2(\beta) - 3 = 0, \\ 2\alpha_{1,1}(\beta) - \alpha_{2,1}^2(\beta) + 3 = \beta; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2\alpha_{2,2}(\beta) + \alpha_{1,2}^2(\beta) - 3 = -\beta, \\ 2\alpha_{1,2}(\beta) - \alpha_{2,2}^2(\beta) + 3 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Для дальнейших действий введем ещё одно обозначение, которому прибегнем при доказательстве следующей теоремы.

Обозначим через $\overset{o}{D}(R_+;H_3)$ линейное множество всех бесконечно дифференцируемых функций со значениями в H_3, которые имеют компактные носители на полуоси R_+ и в нуле удовлетворяют условиям (2).

Теорема 3. *Пусть* $\beta \in \left[0, \frac{27}{4}\right)$. *Тогда при любом* $u(t) \in \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ *имеют место следующие тождества:*

$$\left\| \mathrm{P}_0 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \beta \left\| A^{3-j} \frac{d^j u}{dt^j} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\| F_j\left(\frac{d}{dt};\beta;A\right) u \right\|^2_{L_2(R_+;H)}, \quad j = 1,2. \tag{8}$$

Доказательство. По теоремам о плотности и о следах [2, гл.1] множество $\overset{o}{D}(R_+;H_3)$ всюду плотно в $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$. Следовательно, достаточно доказать справедливость равенств (8) для функций из класса $\overset{o}{D}(R_+;H_3)$. Интегрируя по частям, нетрудно проверить, что если $u(t) \in \overset{o}{D}(R_+;H_3)$ и $\beta \in \left[0, \frac{27}{4}\right)$, то справедливо равенство

$$\left\| F_j\left(\frac{d}{dt};\beta;A\right) u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\| u \right\|^2_{W_2^3(R_+;H)} + \left(\alpha^2_{1,j}(\beta) - 2\alpha_{2,j}(\beta)\right) \left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+ \left(\alpha^2_{2,j}(\beta) - 2\alpha_{1,j}(\beta)\right) \left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \tag{9}$$

С другой стороны, таким же образом проверяется справедливость равенства

$$\left\| \mathrm{P}_0 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\| u \right\|^2_{W_2^3(R_+;H)} + 3\left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|^2_{L_2(R_+;H)} + 3\left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \tag{10}$$

Теперь учитывая (10) в (9) и принимая во внимание (7), завершаем доказательство. Теорема доказана.

Теперь можно определить точные значения чисел $N_j(R_+)$, $j = 1,2$.

Теорема 4. *Имеем* $N_j(R_+) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $j = 1,2$.

Доказательство. В (8) перейдем к пределу при $\beta \to \frac{27}{4}$. В этом случае, для любого $u(t) \in \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ получим следующие неравенства:

$$\left\| \mathrm{P}_0 u \right\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq \frac{27}{4} \left\| A^{3-j} \frac{d^j u}{dt^j} \right\|^2_{L_2(R_+;H)}, \quad j = 1,2.$$

Следовательно, $N_j(R_+)\le\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $j=1,2$. А для того чтобы показать, что здесь имеют место равенства достаточно при любом $\varepsilon>0$ построить функцию $u_\varepsilon(t)\in \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ такую, что

$$\left\|\mathrm{P}_0 u_\varepsilon\right\|^2_{L_2(R_+;H)}-\left(\frac{27}{4}+\varepsilon\right)\left\|A^{3-j}\frac{d^j u_\varepsilon}{dt^j}\right\|^2_{L_2(R_+;H)}<0\,.$$

Отметим, что построение таких функций $u_\varepsilon(t)$ было проведено в работах [10-12]. Поскольку в нашем случае эта процедура носит аналогичный характер, эту часть доказательства теоремы мы опускаем. Теорема доказана.

Перейдем к изучению полного уравнения (1).

Обозначим через P оператор, действующий из $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ в $L_2(R_+;H)$ и порожденный левой частью уравнения (1).

Имеет место следующая

Лемма. *Пусть операторы* A_jA^{-j}, $j=1,2$, *ограничены в* H. *Тогда* P *является ограниченным оператором из* $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ *в* $L_2(R_+;H)$.

Доказательство. При любом $u(t)\in \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$ имеем:

$$\left\|\mathrm{P}u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\left\|\mathrm{P}_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}+\left\|A_1\frac{d^2u}{dt^2}+A_2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\le$$

$$\le\left\|\mathrm{P}_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}+\left\|A_1A^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|A\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)}+\left\|A_2A^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|A^2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}. \qquad (11)$$

Учитывая теорему 1 и теорему о промежуточных производных [2, гл.1], из неравенства (11) получим

$$\left\|\mathrm{P}u\right\|_{L_2(R;H)}\le const\left\|u\right\|_{W_2^3(R;H)}.$$

Лемма доказана.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 5. *Пусть операторы* A_jA^{-j}, $j=1,2$, *ограничены в* H *и выполняется неравенство*

$$\left\|A_1A^{-1}\right\|_{H\to H}+\left\|A_2A^{-2}\right\|_{H\to H}<\frac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

Тогда начально-краевая задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Представим начально-краевую задачу (1), (2) в виде операторного уравнения

$$\mathrm{P}_0u(t)+(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)u(t)=f(t),$$

где $f(t)\in L_2(R_+;H)$, $u(t)\in \overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$. В силу теоремы 1 оператор P_0 имеет ограниченный обратный оператор P_0^{-1}, действующий из $L_2(R_+;H)$ на $\overset{o}{W}{}_2^3(R_+;H)$. Сделав замену $u(t)=\mathrm{P}_0^{-1}\upsilon(t)$, где $\upsilon(t)\in L_2(R_+;H)$, имеем в пространстве $L_2(R_+;H)$ уравнение

$$(E+(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0^{-1})\upsilon(t)=f(t).$$

Учитывая теорему 4, получаем:

$$\left\|(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0^{-1}\upsilon\right\|_{L_2(R_+;H)}=\left\|(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)u\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\left\|A_1A^{-1}\right\|_{H\to H}\left\|A\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_2(R_+;H)}+$$

$$+\left\|A_2A^{-2}\right\|_{H\to H}\left\|A^2\frac{du}{dt}\right\|_{L_2(R_+;H)}\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\left\|A_1A^{-1}\right\|_{H\to H}+\left\|A_2A^{-2}\right\|_{H\to H}\right)\left\|\mathrm{P}_0u\right\|_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\left\|A_1A^{-1}\right\|_{H\to H}+\left\|A_2A^{-2}\right\|_{H\to H}\right)\left\|\upsilon\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Следовательно,

$$\left\|(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to L_2(R_+;H)}\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\left\|A_1A^{-1}\right\|_{H\to H}+\left\|A_2A^{-2}\right\|_{H\to H}\right).$$

Таким образом, в условиях теоремы норма $\left\|(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to L_2(R_+;H)}<1$. Тогда оператор $E+(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0^{-1}$ имеет обратный оператор в $L_2(R_+;H)$. Следовательно, $u(t)$ можно определить формулой

$$u(t)=\mathrm{P}_0^{-1}(E+(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0^{-1})^{-1}f(t),$$

причем

$$\left\|u\right\|_{W_2^3(R_+;H)}\le\left\|\mathrm{P}_0^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to W_2^3(R_+;H)}\left\|(E+(\mathrm{P}-\mathrm{P}_0)\mathrm{P}_0^{-1})^{-1}\right\|_{L_2(R_+;H)\to L_2(R_+;H)}\left\|f\right\|_{L_2(R_+;H)}\le$$

$$\le const\left\|f\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962, 829 с.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
3. Amann H. Maximal regularity and quasilinear parabolic boundary value problems // Recent Advances in Elliptic and Parabolic Problems, Hackensack, NJ: World Scientific, 2005, p.1-17.
4. Ashyralyev A. Nonlocal boundary-value problems for abstract parabolic equations: well-posedness in Bochner spaces // Journal of Evolution Equations, 2006, v. 6, № 1, p. 1-28.
5. Guliyeva F.A. On solvability of a class of initial boundary value problem for an operator-differential equation // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 2007, v. 27 (35), p. 11-18.
6. Mamedov M.M. Solvability and completeness of solutions of parabolic differential-operator equations // Matematychni Studii, 2011, v. 36, № 1, p. 77-85.
7. Алиев А.Р., Эльбабли А.Л. О разрешимости в весовом пространстве операторно-дифференциального уравнения третьего порядка с кратной характеристикой // Доклады РАН, 2012, т. 443, № 4, с. 407-409.

8. Aliev A.R., Elbably A.L. Well-posedness of a boundary value problem for a class of third order operator-differential equations // Boundary Value Problems, 2013, v. 2013:140, p. 1-15.
9. Мирзоев С.С. Условия корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР, 1983, т. 273, № 2, с. 292-295.
10. Mirzoyev S.S. On the norms of operators of intermediate derivatives // Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. of phys.-tech. and math. sciences, 2003, v. 23, № 1, p. 157-164.
11. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференциальные уравнения, 1992, т. 28, № 4, с. 651-661.
12. Aliev A.R., Gasymov A.A. On the correct solvability of the boundary-value problem for one class operator-differential equations of the fourth order with complex characteristics // Boundary Value Problems, 2009, v. 2009, Article ID 710386, p. 1-20.

BİR SİNİF ÜÇTƏRTİBLİ PARABOLİK OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BAŞLANĞIC SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI ŞƏRTLƏRİ HAQQINDA

F.S.LAÇINOVA

XÜLASƏ

İşdə yarımoxda baxılan bir sinif təkrarlanan xarakteristikalı üçtərtibli parabolik operator-diferensial tənliklər üçün başlanğıc sərhəd məsələsinin Sobolev tipli fəzada korrekt və birqiymətli həll olunması tədqiq edilmişdir. Həllolunma şərtləri tədqiq edilən tənliyin operator əmsalları ilə ifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: operator-diferensial tənlik, təkrarlanan xarakteristika, başlanğıc sərhəd məsələsi, Hilbert fəzası, aralıq törəmə operatorları, requlyar həllolunma.

SOLVABILITY CONDITIONS OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A CLASS OF PARABOLIC OPERATOR- DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

F.S.LACHINOVA

SUMMARY

In this paper, a class of parabolic operator-differential equations of the third order with multiple characteristics is considered, for which the initial boundary value problem on the semiaxis is well-posed and uniquely solvable in the Sobolev type-space. Solvability conditions are obtained in terms of the operator coefficients of the investigated equation.

Key words: operator-differential equation, multiple characteristics, initial boundary value problem, Hilbert space, operators of intermediate derivatives, regular solvability.

Поступило в редакцию: 16.09.2013 г.
Подписано к печати: 17.10.2013 г.